ZESTAW DO ĆWICZEŃ Z MATEMATYKI

POZIOM PODSTAWOWY

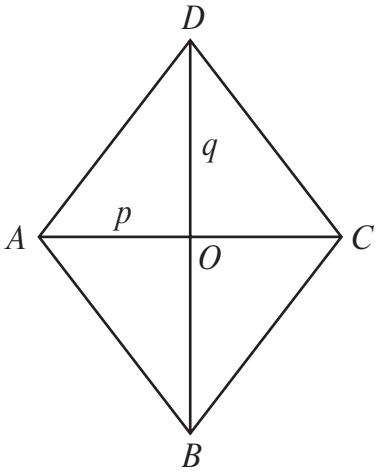
ROZUMOWANIE I ARGUMENTACJA

KARTY PRACY ZESTAW I

ZADANIE 1.

Uzasadnij, że pole rombu o przekątnych p i q wyraża się wzorem $P = \frac{1}{2}pq$.

Rozwiązanie:
Przyjmij oznaczenia: $|AC| = p$, $|BD| = q$.
Przypomnijmy, że przekątne w rombie przecinają się pod kątem prostym i dzielą się na połowy. Co można powiedzieć o długościach boków?



$|AO| =$ _____

$|BO| =$ _____

Pole trójkąta AOD wynosi $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}p \cdot \frac{1}{2}q = \frac{1}{8}pq$.

Postępując analogicznie, oblicz pola pozostałych trójkątów:

Pole trójkąta COD wynosi _____

Pole trójkąta AOB wynosi _____

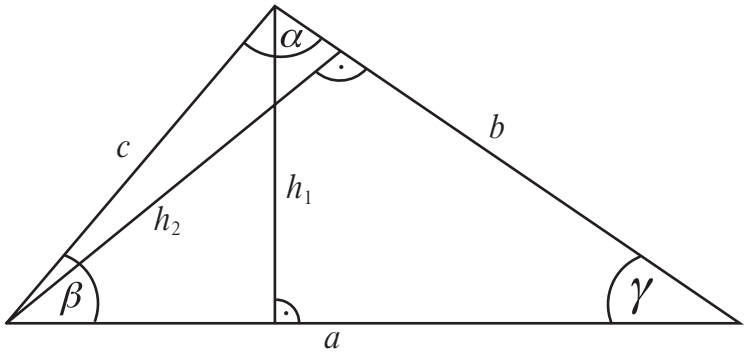
Pole trójkąta COB wynosi _____

Pole rombu $ABCD$ jest sumą pól tych trójkątów i wynosi _____.

ZADANIE 2.

Uzasadnij, że pole trójkąta o bokach a, b, c i kątach α, β i γ wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}.$$



Rozwiązanie:
Niech:
h_1 – będzie wysokością padającą na bok a
wtedy

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1.$$

Stosując funkcje trygonometryczne, otrzymasz $\frac{h_1}{b} = \sin\gamma \Rightarrow h_1 = b \cdot \sin\gamma$

oraz $\frac{h_1}{c} = \sin\beta \Rightarrow h_1 =$ _____,

z tego wynika, że

$b \cdot \sin\gamma = c \cdot \sin\beta$,

$$b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}.$$

$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1$ i $h_1 = b \cdot \sin\gamma$, podstawiając otrzymasz $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$.

Niech h_2 będzie wysokością padającą na bok b.

Stosując funkcje trygonometryczne, otrzymasz $\frac{h_2}{c} = \sin\alpha \Rightarrow h_2 =$ _____

oraz $\frac{h_2}{a} = \sin\gamma \Rightarrow h_2 =$ _____,

Z tego wynika, że $c \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\gamma$ oraz $b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$.

Z pierwszego równania oblicz c i podstaw do drugiego $c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$

$$b = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}$$

Podstawiając otrzymasz:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

Postępując analogicznie uzasadnij, że pole trójkąta o bokach a, b, c i kątach α, β, γ wyraża się wzorem

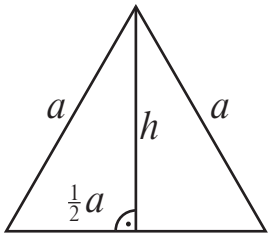
$$P = \frac{1}{2} \cdot b^2 \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}{\sin\beta}.$$

ZADANIE 3.

Uzasadnij, że pole trójkąta równobocznego o boku długości a jest równe $P = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

Rozwiązanie:
Dla dowolnego trójkąta pole wyraża się wzorem: $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$.

Wysokość w trójkącie równobocznym dzieli bok na połowy. Na mocy twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym mamy:



$h^2 + (\frac{1}{2}a)^2 = a^2$

$h^2 + \frac{1}{4}a^2 = a^2$

$h^2 = \frac{3}{4}a^2 \qquad / \sqrt{}$

$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

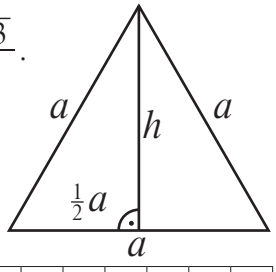
Podstawiając wyrażenie równe h do wzoru na pole trójkąta, otrzymamy $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

ZADANIE 4.

Oblicz pole trójkąta równobocznego, wiedząc, że wysokość $h = \sqrt{2}\, b$.

Rozwiązanie:
Pole trójkąta równobocznego o boku długości a wyraża się wzorem $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Stosując twierdzenie Pitagorasa w $\triangle$ prostokątnym, oblicz długość boku a:



$h^2 + (\frac{1}{2}a)^2 = a^2$

$(\sqrt{2}b)^2 + (\frac{1}{2}a)^2 = a^2$

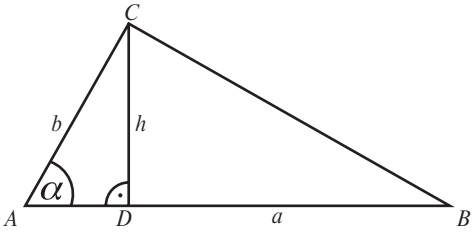
$a =$ _____

Podstawiając wyrażenie równe a do wzoru na pole trójkąta, otrzymasz:

$P =$ _____

ZADANIE 5.

Uzasadnij, że pole trójkąta o bokach a i b i kącie ostrym α zawartym między nimi wyraża się wzorem $P = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin\alpha$



Rozwiązanie:
Dla dowolnego trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$

Stosując funkcje trygonometryczne w trójkącie, ACD otrzymasz:

$\sin\alpha =$ _____ , czyli

$h =$ _____

Podstaw wyrażenie równe h do wzoru na pole $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$.

ZADANIE 6.

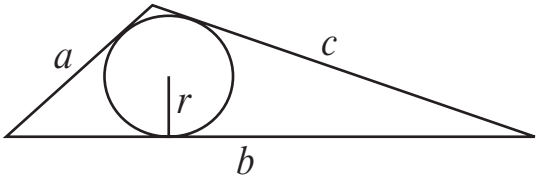
Uzasadnij, że pole $\triangle$ o bokach b i c i kącie ostrym γ zawartym między nimi wyraża się wzorem $P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\gamma$.

ZADANIE 7.

Uzasadnij, że pole trójkąta o obwodzie $2p$ wyraża się wzorem $P = rp$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Rozwiązanie:

Obw $= a + b + c = 2p$



Przypomnijmy wzór na pole dowolnego trójkąta o bokach a, b, c i promieniu okręgu wpisanego w trójkąt r: $P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$

Podstaw do wzoru:

$P =$ _____

ZADANIE 8.

a) Uzupełnij zapis i wykaż, że liczba $6^4 - 5^2$ dzieli się przez 31.

$6^4 - 5^2 = (_____^2 - _____)(_____^2 + 5) = 31(_____ + _____)$

b) Postępując analogicznie jak w podpunkcie **a)**, wykaż, że liczba $11^4 - 11^2$ dzieli się przez 110.

c) $3^6 - 1 = ((3^3)^2 - 1)((3^3)^2 + 1) = (3^3 - 1)(3^3 + 1)(3^6 + 1) =$

$= (3 - 1)(3^2 + 3 + 1)(3^3 + 1)(3^6 + 1) = 2 \cdot 13(3^3 + 1)(3^6 + 1)$

Liczba $3^6 - 1$ dzieli się przez 13.

d) Postępując analogicznie jak w podpunkcie **c)**, wykaż, że liczba $5^{12} - 1$ dzieli się przez 31.

e) Wykaż, że liczba $3^{12} - 2^{12}$ jest podzielna przez 19.

$3^{12} - 2^{12} = (3^6)^2 - (2^6)^2 = (3^6 - 2^6)(3^6 + 2^6) = ((3^3)^2 - (2^3)^2)(3^6 + 2^6) =$

$= (3^3 - 2^3)(3^3 + 2^3)(3^6 + 2^6) = (3 - 2)(3^2 + 3 \cdot 2 + 4)(3^3 + 2^3)(3^6 + 2^6) = 1 \cdot 19(3^3 + 2^3)(3^6 + 2^6)$

f) Postępując analogicznie jak w podpunkcie **e)**, wykaż, że liczba $3^{12} - 2^{12}$ dzieli się przez 5.

ODPOWIEDZI

ZADANIE 1.

$|AC| = p$

$|AO| = \frac{1}{2}p$

$|BD| = q$

$|BO| = \frac{1}{2}q$

Pole trójkąta AOD wynosi $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}p \cdot \frac{1}{2}q = \frac{1}{8}pq$.

Pole trójkąta COD wynosi $\frac{1}{8}pq$.

Pole trójkąta AOB wynosi $\frac{1}{8}pq$.

Pole trójkąta COB wynosi $\frac{1}{8}pq$.

Pole rombu $ABCD$ jest sumą pól tych trójkątów i wynosi $4 \cdot \frac{1}{8}pq = \frac{1}{2}pq$.

ZADANIE 4.

$a = \frac{2\sqrt{6}}{3}b$

$P = \frac{2\sqrt{3}b^2}{3}$

ZADANIE 5.

$\sin\alpha = \frac{h}{b}$

$h = b \cdot \sin\alpha$

ZADANIE 8.

a) $6^4 - 5^2 = (6^2 - 5)(6^2 + 5) = 31(6^2 + 5)$

b) $11^4 - 11^2 = (11^2 - 11)(11^2 + 11) = 110(11^2 + 11)$

d) $5^{12} - 1 = ((5^6)^2 - 1^2) = (5^6 - 1)(5^6 + 1) = ((5^3)^2 - 1)(5^6 + 1) = (5^3 - 1)(5^3 + 1)(5^6 + 1) =$
$= (5 - 1)(5^2 + 5 \cdot 1 + 1)(5^3 + 1)(5^6 + 1) = 4(25 + 5 + 1)(5^3 + 1)(5^6 + 1)$

f) $3^{12} - 2^{12} = (3^6 - 2^6)(3^6 + 2^6) = (3^6 + 2^6)(3 + 2)(3^2 - 6 + 4)(3^3 - 2^3)$