ZESTAW DO ĆWICZEŃ Z MATEMATYKI

POZIOM ROZSZERZONY

ROZUMOWANIE I ARGUMENTACJA

KARTY PRACY ZESTAW II

ZADANIE 1.

a) Wybrane liczby zapisano jako sumy lub różnice pewnej ilości trójek lub piątek.

$7 = 2 \cdot 5 - 3$
$8 = 3 + 5$
$9 = 3 \cdot 3$
$10 = 2 \cdot 5$
$11 = 2 \cdot 3 + 5$
$12 = 4 \cdot 3$

Zastanawiając się, czy dowolną liczbę można zapisać jako sumę lub różnicę pewnej ilości trójek lub piątek, zauważmy, że:

$1 = 2 \cdot 3 - 5$, zaś $-1 = 5 - 2 \cdot 3$.

Każda liczba naturalna jest sumą pewnej ilości jedynek, zatem:

każdą liczbę całkowitą można zapisać w postaci sumy lub różnicy pewnej ilości trójek i piątek.

b) Uzasadnij podobnie, że:

każdą liczbę całkowitą można zapisać w postaci sumy lub różnicy pewnej ilości trójek i dwójek.

ZADANIE 2.

Przeanalizuj równości.
$21 - 12 = 3 \cdot 3$
$32 - 23 = 3 \cdot 3$
$31 - 13 = 6 \cdot 3$
$42 - 24 = 6 \cdot 3$
$41 - 14 = 9 \cdot 3$
$52 - 25 = 9 \cdot 3$
Można sformułować następujące twierdzenie:
Różnica różnych liczb dwucyfrowych naturalnych zbudowanych z tych samych cyfr jest podzielna przez 3.

Udowodnijmy je.
$10a + b - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b) = 3 \cdot 3(a - b)$
$(a, b$ – cyfry)

Wnioskiem z przeprowadzonego dowodu może być twierdzenie. że:
Różnica różnych liczb dwucyfrowych naturalnych zbudowanych z tych samych cyfr jest podzielna przez 9.

A jak to będzie w przypadku liczb trzycyfrowych?
Wyznaczmy kilka różnic.
$512 - 215 = 297 = 3 \cdot 99$
$512 - 251 = 261 = 3 \cdot 87$
$521 - 512 = 9 = 3 \cdot 3$

Zatem:
Różnica różnych liczb trzycyfrowych naturalnych zbudowanych z tych samych cyfr jest podzielna przez 3.

Udowodnij to twierdzenie.

ZADANIE 3.

Uzupełnij brakujące liczby.

$1 + 2 = ... = 3 \cdot 1$

$2 + 4 = ... = ... \cdot 2$

$4 + 8 = ... = ... \cdot 4$

$..... + 16 = ... = ... \cdot 8$

$..... + ... = ... = 3 \cdot .....$

Sprawdź, czy zawsze suma dwóch kolejnych potęg liczby 2 jest podzielna przez 3.

Przez jaką liczbę jest podzielna suma trzech kolejnych potęg liczby 2?

Rozwiąż analogiczny problem dla sumy dowolnej ilości kolejnych potęg liczby 2.

Liczbę 2 zastąp inną liczbą naturalną i zbadaj podobne własności.

Uogólnij zaobserwowane prawidłowości, sformułuj twierdzenie dotyczące podzielności sumy k kolejnych potęg liczby naturalnej n i udowodnij je.

ZADANIE 4.

Sprawdź, że rozwiązaniem układu:

$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ jest para liczb (1, 3)

$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$ jest para liczb (1, 5)

$\begin{cases} y = 5x + 4 \\ y = 4x + 5 \end{cases}$ jest para liczb (1, 9)

Na podstawie obserwacji powyższych przykładów można przypuszczać, że rozwiązaniem układu równań

$\begin{cases} y = ax + a + 1 \\ y = (a + 1)x + a \end{cases}$ dla $a \in \mathrm{N}$

powinna być para liczb $(1, 2a + 1)$.

Sprawdźmy to.

$ax + a + 1 = (a + 1)x + a$

$ax + 1 = ax + x$

$1 = x$

Zatem:

$y = a + a + 1 = 2a + 1$ cnd.

Tak więc udowodniliśmy, że rozwiązaniem układu równań:

$\begin{cases} y = ax + a + 1 \\ y = (a + 1)x + a \end{cases}$ dla $a \in \mathrm{N}$

jest para liczb $(1, 2a + 1)$.

Analizując dowód, można stwierdzić, że założenie dla $a \in \mathrm{N}$ nie jest konieczne, zatem prawdziwe jest to twierdzenie dla dowolnej liczby rzeczywistej a.

ZADANIE 5.

a) Rozwiąż podane układy równań.

(1) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -3x + 2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y = 5x + 10 \\ y = 10x + 5 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} y = 0{,}25x + 4 \\ y = 4x + 0{,}25 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} y = 6x - 0{,}5 \\ y = -0{,}5x + 6 \end{cases}$ (6) $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 2 \\ y = 2x + \frac{1}{3} \end{cases}$

b) Jaki związek dostrzegasz pomiędzy rozwiązaniami takich układów równań?

$\begin{cases} y = ax + b \\ y = bx + a \end{cases}$ $a \neq b$

c) Podaj przykłady układów równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi, aby ich rozwiązaniami były pary liczb:

(1) $x = 1, \ y = 5$
(2) $x = 1, \ y = 2$
(3) $x = 1, \ y = -7$

d) Na podstawie obserwacji zadania **a)** i **b)** sformułuj twierdzenie i udowodnij je.

e) Co jest rozwiązaniem podanych układów równań?

$$\begin{cases} y = ax - \frac{a}{2} \\ y = -\frac{a}{2}x + a \end{cases} \qquad \begin{cases} y = ax + \frac{a}{2} \\ y = \frac{a}{2}x + a \end{cases}$$

ODPOWIEDZI

ZADANIE 1.

b)

$1 = 3 - 2$, zaś $-1 = 2 - 3$.

Każdą liczbę całkowitą można zapisać w postaci sumy lub różnicy pewnej ilości trójek i dwójek.

ZADANIE 2.

$100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 99a - 99c = 99(a - c) = 3 \cdot 33(a - c)$

$(a, b, c$ – cyfry$)$

$100a + 10b + c - (100c + 10a + b) = 90a - 9b - 99c = 3(30a - 3b - 33c)$

$(a, b, c$ – cyfry$)$

$100a + 10b + c - (100a + 10c + b) = 9b - 9c = 3(3b - 3c)$

$(a, b, c$ – cyfry$)$

$100a + 10b + c - (100b + 10c + a) = 99a - 90b - 9c = 3(33a - 30b - 3c)$

$(a, b, c$ – cyfry$)$

$100a + 10b + c - (100b + 10\mathrm{a} + c) = 90a - 90b = 3(30a - 30b)$

$(a, b, c$ – cyfry$)$

ZADANIE 3.

$1 + 2 = 3 = 3 \cdot 1$

$2 + 4 = 6 = 3 \cdot 2$

$4 + 8 = 12 = 3 \cdot 4$

$8 + 16 = 24 = 3 \cdot 8$

$16 + 32 = 48 = 3 \cdot 16$

Suma dwóch kolejnych potęg liczby 2 jest podzielna przez 3.

Suma trzech kolejnych potęg liczby 2 jest podzielna przez 7.

ZADANIE 5.

a)

(1) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 15 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4{,}25 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 5{,}5 \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2\frac{1}{3} \end{cases}$

b)

$\begin{cases} y = ax + b \\ y = bx + a \end{cases}$ (1, a + b)

c)

(1) $\begin{cases} y = x + 4 \\ y = 4x + 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y = -3x + 5 \\ y = 5x - 3 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y = -x - 6 \\ y = -6x - 1 \end{cases}$

e)

$(1, \frac{a}{2}), (1, \frac{3a}{2})$